

Des jeux de hasard à l'évidence statistique: quelques repères historiques

Methods and research meetings

UNIL (IMA/FORS/MISC)

Christiane Ruffieux

le 5 octobre 2010

Plan

- L'évidence factuelle et le problème de l'induction (1600-1750)
- Les conditions de l'émergence du concept de probabilité et sa signification (1660)
- Les premiers probabilistes et l'urne comme modèle de la causalité (1700-1800)
- Les médecins et l'approche statistique (1700-1850)
- Enthousiasmes et oppositions (1830-1840)
- Les logiciens: la rupture (1840-1850)
- Les mathématiciens: de l'erreur à la variation (1860-1900)
- Les fondements de la théorie statistique (1920-1940)
- EBM et L'évidence statistique (1992-2002)

Aux origines de la science moderne

- Les premiers héros modernes
 - Copernic (1473-1543) et Galilée (1564-1642)
 - Ramus (1515-1572) et Bacon (1561-1676)
 - Paracelse (1433-1541) et Vésale (1514-1664)
- Caractéristiques de la modernité
 - Rejet de l'autorité
 - Nouvelle perception du temps
 - Nouvelle théorie de la connaissance

Connaissance des Modernes

- But: maîtrise de ce qui se passe
- Objectif: relier causes et effets
- Objet: événements (faits) et leurs causes
- Méthode d'investigation: observation, expérimentation
- Méthode de preuve: évidence factuelle

Méta-épistémologie historique

- Lorenz Krüger et al: *The probabilistic revolution* (1986)
- Ger Girgerenzer et al *The Empire of Chance : How Probability changed science and everyday life* (1989)
- Stephen Stigler: *The measurement of Uncertainty before 1900* (1986)
- Theodore M Porter: *The Rise of Statistical Thinking (1820-1900)* (1986) (*Trust in Numbers* (1995))
- Lorraine Daston: *Classical Probability in the Enlightenment* (1988)
- Ian Hacking *L'émergence de la probabilité* (1975) / *Logique de l'inférence statistique* (1965) / *La maîtrise du hasard* (1990)

Emergence probabilité

- Pascal: *Logique ou l'art de penser* (1662)
- Contexte jeux de hasard
- Signification double:
 - Degré de croyance (opinion probable si soutenue par des faits)
 - Fréquence (fait probable si observé fréquemment)
- Mutation idée de signe (selon Hacking)
 - Doctrine des signatures (Paracelse)
 - Evidence factuelle (Graunt)

Emergence du concept de fonction

- Leibnitz (env. 1660)
- Analyse algébrique: art de trouver une relation opératoire (f) qui fait correspondre deux séries de quantités ($y=f(x)$).
- Problème de la nature de ces nouvelles entités (capables de générer des nombres)
- Problème de classification des fonctions, logique des relations.

Emergence fait moderne

- John Graunt et William Petty (1660)
 - Tables mortalité par âge par sexe et par région
 - Prévalence des maladies par saison
- Edmond Halley (env. 1670)
 - Calcul de rentes sur la base de tables de mortalité
- John Arbuthnot (1712)
 - *Argument for divine providence* (PTRS)

Probabilistes classiques (1)

- Jacques Bernoulli (1713)
 - *Ars conjectandi*
 - Abraham de Moivre (1718/1733)
 - *Doctrine of Chance*
-
- Résolvent des problèmes de probabilité directe
 - Ne parviennent pas à résoudre des probabilités inverses

Problème de l'induction

- Hume
 - *Traité de la nature humaine* (1739)
 - *Essais philosophiques sur l'entendement humain* (1748)
 - *Enquête sur l'entendement humain* (1758)
- Doute que les faits passés fournissent des raisons de croire quelque chose au sujet des objets ou faits futurs

Probabilistes classiques (2)

- Thomas Bayes (1763)
 - *An essay towards solving a problem in the doctrine of chance*
- Pierre Simon de Laplace (1774)
 - *Mémoire sur la probabilité des causes d'après les événements*

Thomas Bayes

Intention

« Find a method by which we might judge concerning the probability that an event has to happen, in given circumstances, upon the supposition that we know nothing concerning it but that, under the same circumstances, it has happened a certain number of times, and failed a certain number of times »

Problem :

Given: the number of times in which an unknown event has happened [k] and failed [$n-k$]:

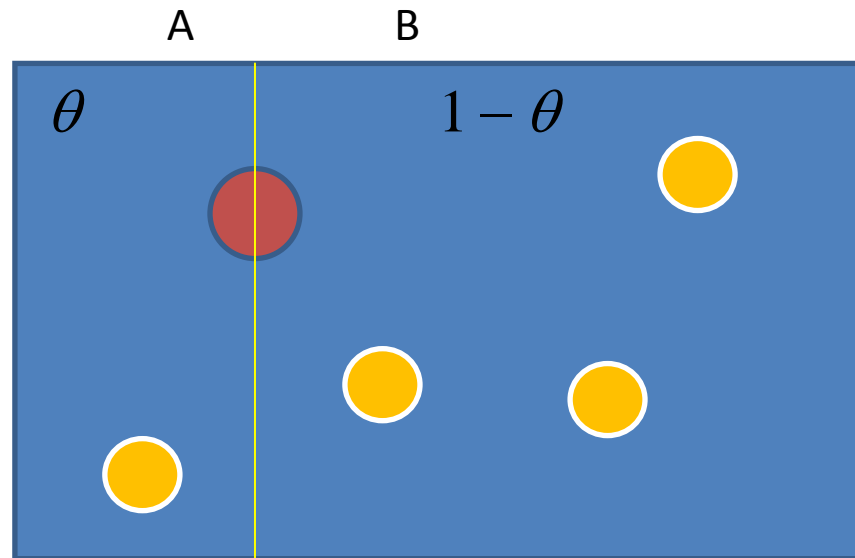
Required: the **chance** [α] that the **probability** [θ] of its happening in a single trial lies somewhere between any two degrees of probability that can be named [(a,b)].

En notation actuelle:

$$P(a < \theta < b \mid Y = k/n) = \alpha$$

Expérience servant de modèle à Bayes

Table de billard



$$P(a < \theta < b | Y = k/n) = \frac{P(Y = k/n | a < \theta < b)P(a < \theta < b)}{P(Y = k/n)}$$

Pierre Simon de Laplace

« L'incertitude des connaissances humaines porte sur les événements ou sur les causes des événements »

« Si on est assuré, par exemple, qu'une urne ne renferme que des billets blancs et noirs dans un rapport donné, et que l'on demande la probabilité qu'en prenant au hasard un de ces billets il sera blanc, l'événement alors est incertain, mais la cause dont dépend la probabilité de son existence, c'est-à-dire le rapport de billets blancs aux noirs, est connue »

Principe étiologique

1. « Si un événement peut être produit par un nombre n de causes différentes, les probabilités de l'existence de ces causes prises de l'événement sont entre elles comme les probabilités de l'événement prises de ces causes »

2. « la probabilité de l'existence de chacune d'elles est égale à la probabilité de l'événement prise de cette cause, divisée par la somme de toutes les probabilités de l'événement prises de chacune de ces causes. »

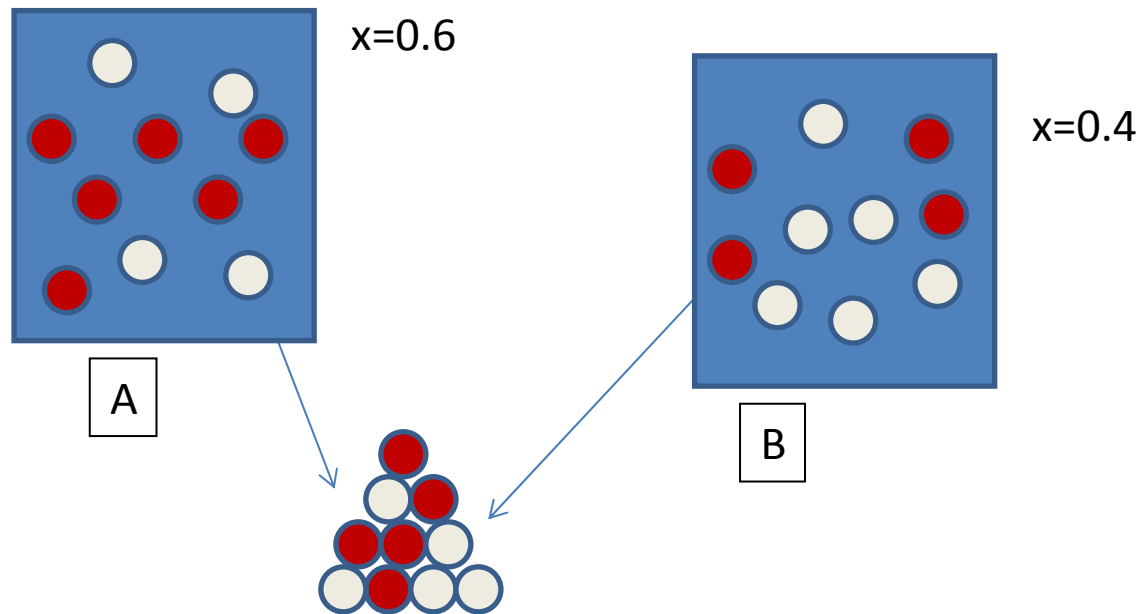
En notations actuelles

$$1. \quad \frac{P(C_i | E)}{P(C_j | E)} = \frac{P(E | C_i)}{P(E | C_j)}$$

$$2. \quad P(C_i | E) = \frac{P(E | C_i)}{\sum_j P(E | C_j)}$$

Expérience servant de modèle à Laplace

On a tiré $n=10$ boules de l'une des deux urnes A ou B. On a obtenu $p=5$ boules rouge et $q=5$ boules blanches. Sachant que l'urne A contient $x=60\%$ de boules rouge et l'urne B en contient 40% , quelle est la probabilité que l'échantillon tiré provienne de l'urne A?



$$P(C = A | Y = k/n) = \frac{P(Y = k/n | C = A)}{P(Y = k/n | C = A) + P(Y = k/n | C = B)}$$

Laplace (suite)

Formule générale pour une infinité d'urnes

$$P(X = x | Y = k/n) = \frac{x^k (1-x)^{n-k} dx}{\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx}$$

Montre que si n assez grand la précision devient aussi grande que l'on veut

$$P(b_1 < x < b_2 | Y = k/n) = \alpha$$

Établit la règle de succession

$$P(Y_1 = 1 | Y_n = k/n) = \frac{k+1}{n+2}$$

Déterminisme de Laplace

- Déterminisme du monde :
 - l'état présent du monde est entièrement déterminé par l'état antérieur
 - la cause (raison) de l'état présent est l'état antécédent
- L'urne comme modèle de causalité ???

Causes régulières et irrégulières

« Au milieu des causes variables et inconnues que nous comprenons sous le nom de hasard, et qui rendent incertaine et irrégulière la marche des événements, on voit naître à mesure qu'ils se multiplient une régularité frappante qui semble tenir à un dessein, et que l'on a considérée comme une preuve de la providence ».

Essai philosophique sur les probabilités 1814

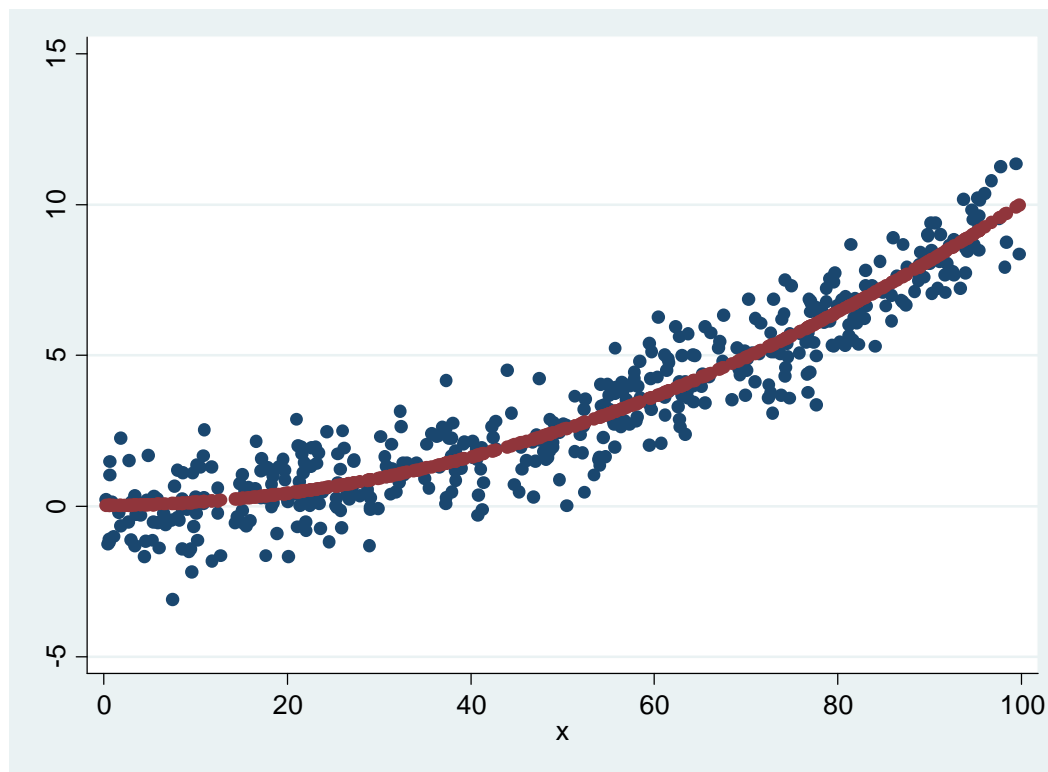
Les astronomes (1750-1850)

- Déterminer les mouvements de la lune
- Expliquer les inégalités des mouvements de Jupiter et Saturne
- Trouver la figure de la Terre (sphère ou aplatie aux pôles)

Combiner des observations

Les astronomes savent que les observations sont une fonction de facteurs connus. Le problème est de trouver quelle fonction

$$Y = f(X)$$



Comment trouver la fonction

- Euler 1749
 - pas de solution
- Mayer 1750
 - une méthode ad hoc
- Boscovich 1755
 - minimise la somme des valeurs absolues des écarts
- Laplace 1783
 - minimise l'écart maximal
- Laplace 1787
 - utilise la méthode de Mayer (améliorée)
- Legendre 1805
 - minimise la somme des carrés des erreurs

La loi des erreurs

- Gauss 1809
 - maximum de vraisemblance
 - moindre carré
 - loi normale
- Laplace 1812
 - Théorème central limite (1810)
 - Théorie analytique des probabilités (1812)
 - Essais philosophiques sur les probabilités (1814)

Modèle statistique

Modèle statistique: Les observations s'expliquent par une **cause régulière** (l'objet de la mesure) et des **causes irrégulières** (erreurs aléatoires)

$$Y = f (X) + \varepsilon$$

ε Variable latente aléatoire distribuée selon une loi normale

X Facteurs fixes

f Forme linéaire paramétrique

L'urne comme modèle de causalité

- Indéterminisme de notre représentation du monde :
 - Les effets observés sont somme de causes régulières et irrégulières
 - en répétant les observations, les effets des causes irrégulières s'annulent

Les applications (Laplace)

- Le ratio des naissances fille/garçon
- Le lever du soleil
- Météo
- La médecine

Ratio fille/garçon

« La constance dont il s'agit, est un résultat des causes régulières qui donnent la supériorité aux naissances des garçons, et qui l'emportent sur les anomalies dues au hasard, lorsque le nombre des naissances annuelles est considérable. La recherche de la probabilité que cette constance se maintiendra pendant un long espace de temps appartient à cette branche de l'Analyse des hasards qui remonte des événements passés à la probabilité des événements futurs; et il résulte qu'en partant des naissances observées depuis 1745 jusqu'en 1784, il y a 4 à parier contre un qu'à Paris les naissances annuelles des garçons surpasseront constamment pendant un siècle les naissances des filles; il n'y a donc aucune raison de s'étonner que cela ait eu lieu pendant un demi-siècle. » (Laplace 1814).

Le lever du soleil

« Le motif de croire que sur 10 millions de boules blanches mêlées avec une noire ce ne sera point la noire que je tirerai du premier coup est de la même nature que le motif de croire que le soleil ne manquera pas de se lever demain ».

Essais thérapeutiques

« ainsi, pour reconnaître le meilleur des traitements en usage dans la guérison d'une maladie, il suffit d'éprouver chacun d'eux sur un même nombre de malades, en rendant toutes les circonstances parfaitement semblables: la supériorité du traitement le plus avantageux se manifestera de plus en plus, à mesure que ce nombre s'accroîtra; et le calcul fera connaître la probabilité correspondante de son avantage, et du rapport suivant lequel il est supérieur aux autres »

1814 Laplace

Les médecins (1700-1800)

- 1722 Jurin: l'inoculation
- 1763 Lind: essai randomisé
- 1780-1800: nombreuses recherches en GB
- 1786 Odier: étude sur le magistère de bismuth
- 1793 Fordyce: *An Attempt to Improve the Evidence in Medicine*

Concours sur le croup (1806)

Programme

“Déterminer d’après les monuments pratiques de l’art et d’après des observations exactes, les caractères de la maladie connue sous le nom de croup et la nature des altérations qui la constituent, les circonstances extérieures et intérieures qui en déterminent le développement, ses affinités avec d’autres maladies, en établir d’après une expérience constante et comparée le traitement le plus efficace, indiquer les moyens d’en arrêter le progrès et d’en prévenir l’invasion”

Recensements gouvernementaux

- Durant le 18^{ème} l'importance de connaître le nombre d'habitants apparaît de plus en plus aux yeux des gouvernements et philosophes (Malthus (1798) *Essay on the principle of population*)
- 1801 Census Act en GB (tous les 10 ans)
- 1801 Recensement prescrit par Lucien Bonaparte (tous les 5 ans)

Sociétés de statistiques scientifiques

- 1830 Annales d'hygiène publique (Villermé)
- 1832 Société d'Observation (Louis)
- 1834 Royal Statistical Society (Babbage)
 - William Farr
 - Augustus Guy
- Intérêt pour les déterminants sociaux et démographiques de la mortalité et morbidité
- Avalanche de nombres dans tous les domaines

Les enthousiastes de la statistique

- Sont fascinés par les régularité statistiques
- Voient l'ordre sortir du chaos
- Croient en une physique sociale.
- Voient dans la loi normale une loi de la nature universelle
- Croient à l'existence des moyennes
- Croient que les lois mathématiques gouvernent la nature. La découverte des lois introduit de la certitude dans la connaissance.

Les résistances

- 1835 Dispute à l'Académie des sciences de Paris
 - Rend l'objet d'étude confus.
 - L'homme moyen n'existe pas
 - Absurde de fonder une science sur l'aléatoire
 - Si les lois statistiques gouvernent le monde quelle place pour le libre-arbitre?
- **Jules Gavarret** *Principes généraux de statistique médicale* (1840).
- 1840-1850 les médecins se tournent vers la physiologie
 - les phénomènes physiologiques peuvent s'expliquer par les lois (déterministes) de la physique et de la chimie
 - Font des expériences sur peu de sujets et comparent les moyennes directement.

Les logiciens et la rupture

- Vers 1840, les fondements des probabilités tels qu'exposés par Laplace apparaissent incohérents
 - 1842 Fries *Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung*
 - 1842 Ellis *On the Foundation of Probabilites*
 - 1843 Mill *System of Logic*
 - 1854 Boole *Investigation into the Laws of Thought*
 - 1866 Venn *The Logic of Chance (fréquentistes)*
 - 1876 Jevons *The Principles of Science (subjectivistes)*

Les mathématiciens: de l'erreur à la variation

- Recherches des déterminants génétiques de la santé
- Recherche des corrélations familiales

- F. Galton
 - corrélation, régression
- K. Pearson and the Biometric School (1893)
 - corrélations, déviation standard etc...
 - 1892 *Grammar of Science*
 - 1920 *The Fundamental Problem of Statistics*
- R.A Fisher
 - La statistique science des variations

Les mathématiciens et les fondements

- 1921 Fisher
 - *On the mathematical foundation of the theoretical statistics*
- 1930 Fisher
 - *Inverse probability*
- 1933 Neyman
 - *The testing of statistical hypotheses in relation to probabilities a priori*
- 1935 Fisher
 - *The logic of inductive inference*
- 1937 Neyman
 - *Outlines of a Theory of statistical estimation based on the classical theory of probability*
- 1942 Neyman
 - *Basic Ideas and some recent results of the theory of testing statistical hypotheses*

Quelle est la question fondamentale

- $P(\text{data} \mid H_0)$
- $P(\text{data} \mid \text{data})$
- $P(H_0 \mid \text{data})$

Les tests statistiques et p-valeur

- Les tests statistiques sont dérivés dans 3 paradigmes
 - Test de Neyman-Pearson (choisir entre 2 actions)
 - Test Fisherian (mesurer l'évidence contre H_0)
 - Test de rejet (décider si une hypothèse H_0 est vraie)

Evidence Based Medicine

« **New paradigm for medical practice is emerging.** EBM deemphasizes intuition, unsystematic clinical experience, and pathophysiologic rationale as sufficient grounds for clinical decision-making and stresses the examination of evidence from clinical research. Evidence-based medicine requires new skills of the physician, including efficient literature searching and the **application of formal rules of evidence** evaluating the clinical literature » 1992, JAMA

Contestation du paradigme EBM

- **2002 J. Eval Clin Pract**
 - Pas démontré que EBM améliore la pratique médicale
 - Les résultats obtenus sur des groupes ne font pas sens au niveau individuel
 - Mise en question du concept de risque individuel estimé dans des études
 - Cookbook medicine, démotivation
 - Ignore les valeurs des patients et de la société

Contestation de la logique du test statistique (1)

- La p-valeur ($P(\text{data} | H_0)$) est utilisée à la fois comme critère de décision pour l'action de croire et comme mesure d'évidence qu'on pris la bonne décision ($P(H_0 | \text{data})$).
- Mais la p-valeur n'est pas une mesure de l'évidence d'une hypothèse

Contestations de la logique du test (2)

- Royall, Goodman, Rothman, Freeman
- Critiquent l'incohérence des pratiques concernant :
 - unilatéralité/bilatéralité
 - analyses intérimaires
 - tests multiples
- Suggestion : Likelihood Ratio de H_1 versus H_2